Rozšíření MA1 - domácí úkol 6

I. Funkce definované implicitně.

1. i) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$. Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ.

Úvodem:

Snad pochopitelné „povídání" o tom, co je funkce, definovaná implicitně, a jak ji „chápat", si můžete přečíst, chcete-li, v části přednášky pro MA2 ze 6. 4. 2020 (snímky 6-10). Pak v této přednášce následuje „přesná" definice pojmu „funkce, definovaná implicitně" a důležitá věta (užitečná i v aplikacích) – věta „o implicitní funkci" pro nejjednodušší případ, pro implicitně definovanou funkci jedné proměnné (strana 11). Dále je zde několik vysvětlujících (a snad i užitečných) poznámek k uvedené větě a několik příkladů pro „objasnění" věty.

Zde, jako obvykle, shrneme to základní.

Formulace problému:

Je dána (obecně nelineární) rovnice pro dvě neznámé

$$F(x,y)=0 \;,$$

a „známe" jedno řešení $(x_0,y_0)\in R^2$ této rovnice, tedy víme, že platí

$$F(x_0,y_0)=0 \;.$$

A náš „problém"? Zjistit, kdy bude mít rovnice při volbě x „blízko" hodnoty x_0 jediné řešení y „blízko" y_0. A pokud ke „zvolenému" x bude takto „náležet" jediné y takové, že $F(x,y)=0$ (z jedné rovnice pro dvě neznámé asi nemůžeme určit jednoznačně obě neznámé), lze chápat y jako funkci x, tj. $y=f(x)$, a pak platí $F(x,f(x))=0$ „blízko" bodu x_0. Tato funkce $f(x)$ je nazvána funkce, definovaná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0).

Poznámka :

1. funkce, implicitně definovaná rovnicí $F(x,y)=0$ (v okolí bodu (x_0,y_0)) se často, zvláště v aplikacích, značí též $y=y(x)$; budeme zde toto značení užívat také;
2. často se říká funkci, definované implicitně rovnicí $F(x,y)=0$, jen krátce „implicitní funkce".

A zkusme nyní „přesně":

Definice: Nechť

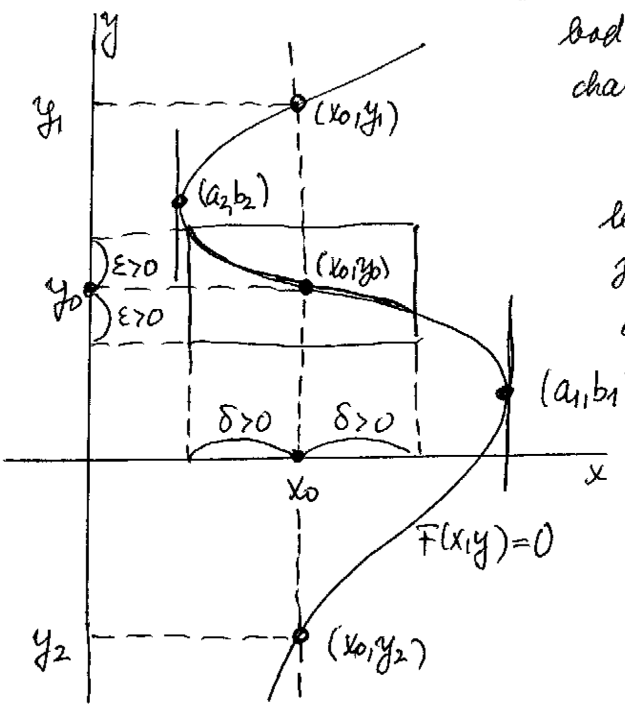
(1) $F(x,y)$ je funkce definovaná v otevřené množině $G\subset R^2$ (tj. $F: G\subset R^2\to R$)

(2) existuje bod $(x_0,y_0)\in G$ tak, že $F(x_0,y_0)=0$.

Říkáme, že rovnice $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=y(x)$, když existují $\varepsilon>0$, $\delta>0$ tak, že pro každé $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ je $y=y(x)$ jediné řešení rovnice $F(x,y)=0$ takové, že $y(x)\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$.
Pak tedy platí: (i) $y(x_0)=y_0$ a (ii) $F(x,y(x))=0$ pro $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

A zkusme si toto představit: množina bodů, kde $F(x,y)=0$, je „vrstevnice" grafu funkce $z=F(x,y)$ pro $z=0$, bod (x_0,y_0) leží na této křivce, a $\delta>0$, $\varepsilon>0$ charakterizují „okénko"

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon),$$



tedy „vrstevnice" je grafem funkce $y=y(x)$; je „vidět", že $\delta>0$ i $\varepsilon>0$ „musí" být dostatečně „malé", aby v okénku, zvolíme-li $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, byl jediný bod (x,y), tj. $y\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$. Ve „velkém" okénku by rovnice mohla mít i řešení tři (na našem obrázku).

a na obrázku je též „vidět", že v množině $\{(x,y)\in R^2;\ F(x,y)=0\}$, tj. na naší „křivce", mohou být body, kolem kterých nelze najít „žádné", ani malinké, okénko, kde vrstevnice bude grafem funkce $y=y(x)$ – zde jsou to body (a_1,b_1), (a_2,b_2).

a jak poznat ty body (x_0,y_0), v jejichž okolí je rovnicí $F(x,y)=0$ definována implicitně funkce $y=y(x)$? To říká

Věta (o „implicitní" funkci)

nechť (1) $F(x,y)\in C^{(k)}(G)$, $G\subset R^2$ je otevřená množina;

(2) $F(x_0,y_0)=0$, $(x_0,y_0)\in G$;

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Pak rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=y(x)$, $y(x)\in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$.

Tedy platí: (i) $y(x_0)=y_0$

(ii) $F(x,y(x))=0$ v $\mathcal{U}(x_0)$

a navíc: (iii) $$y'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} \quad \text{v } \mathcal{U}(x_0),$$

tedy známe „číselně" $$y'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$ (neboť $y(x_0)=y_0$)

Poznámky:

1. Předpoklad (3) věty, tj. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, znamená, že v bodě (x_0,y_0) vrstevnice (o rovnici $F(x,y)=0$) nemá tečnu rovnoběžnou s osou y, tj. nemůže nastat „případ" bodů (a_1,b_1), resp. (a_2,b_2), z „našeho" obrázku.

2. V bodě $x=x_0$ můžeme určit ze vzorce (iii) $y'(x_0)$ (neboť známe $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ $(\neq 0)$), a tedy i lineární aproximaci řešení rovnice $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0).
V případě, že $F(x,y)\in C^{(k)}(G)$, $k\geq 2$, lze vyjádřit i derivace $y''(x),\dots,y^{(k)}(x)$ v okolí bodu x_0 (v $\mathcal{U}(x_0)$ – existuje takové okolí, kde tyto derivace existují), číselně pak i $y''(x_0),\dots,y^{(k)}(x_0)$, tedy můžeme funkci $y(x)$, implicitně definovanou rovnicí $F(x,y)=0$, v okolí bodu $x=x_0$ aproximovat Taylorovým polynomem k-tého stupně. Tedy, můžeme rovnici $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0) řešit pomocí Taylorova polynomu „přibližně".

3. Je-li $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, ale $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, pak můžeme ve větě o implicitní funkci „vyměnit" proměnné $\underline{x}$ a $\underline{y}$, a pak rovnicí $F(x,y)=0$ bude v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $x=x(y)$, tj. $x(y_0)=x_0$ a $F(x(y),y)=0$ v „nějakém" okolí $\mathcal{U}(y_0)$.

4. Odvodíme si (jako teoretický příklad) vzorec pro $y'(x)$ ((iii) ve větě) (užitím „řetízkového" pravidla):
Funkce $y(x)$ splňuje v okolí bodu x_0 rovnici $F(x,y(x))=0$, tedy
(i) $\frac{d}{dx}\left(F(x,y(x))\right)=0$ v tomto okolí $\mathcal{U}(x_0)$. A protože funkce $F\in C^{(k)}(G)$ a $y(x)\in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$, jsou splněny předpoklady „řetízkového pravidla" v okolí bodu x_0; tj.
(ii) $\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\cdot y'(x)$,
tedy z (i) a (ii) pro $y'(x)$ dostaneme rovnici lineární (!)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\cdot y'(x)=0 \quad ,(*)$$

a protože (díky spojitosti $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))$ v $\mathcal{U}(x_0)$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$) je i $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$, dostaneme z $(*)$ vzorec (iii) ve větě.

a příklady:

ii) Je dána rovnice

$$x^2 - y^3 + x^2 y - 1 = 0 \quad (*).$$

a) Ukažte, že rovnicí (*) a podmínkou $f(1) = 0$ je v okolí bodu $(1,0)$ definována implicitně funkce $y = f(x)$.

b) Vypočítejte $f'(1)$ a $f''(1)$.

c) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(1,0)$.

d) Aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

---

a) ověříme předpoklady věty o implicitní funkci:

zde označme $F(x,y) = x^2 - y^3 + x^2 y - 1$, bod $(x_0, y_0) = (1,0)$;

pak (1) $F(x,y) \in C^\infty(R^2)$, tj. $G = R^2$ (otevřená množina)

(2) $F(1,0) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -3y^2 + x^2 \big|_{(1,0)} = 1$, tj. $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) \neq 0$;

tedy, dle věty o implicitní funkci je rovnicí (*) definována implicitně v okolí bodu $(1,0)$ funkce $y = y(x) \in C^\infty(\mathcal{U}(1))$ taková že

(i) $y(1) = 0$

(ii) $x^2 - y^3(x) + x^2 y(x) - 1 = 0$ v $\mathcal{U}(1)$

---

b) výpočet $y'(1)$, $y''(1)$:

jednodušší, než užít vzorec (iii) z věty pro výpočet $y'(1)$, a zvláště pak pro výpočet $y''(1)$, je derivovat rovnici v (ii), ukážeme si obě „cesty":

α) $y'(1)$:

v $\mathcal{U}(1)$ platí: $x^2 - y^3(x) + x^2 y(x) - 1 = 0 \;\Big|\; \frac{d}{dx}$ (derivujme tuto rovnici podle x)

$2x - 3y^2(x) . y'(x) + 2x\,y(x) + x^2 y'(x) = 0$, tedy

$(**)$ $\quad y'(x)\,(x^2 - 3y^2(x)) = -2x - 2x\,y(x))$ v $\mathcal{U}(1)$

a pro $x = 1$: $\quad y'(1) \cdot 1 = -2$

a užitím vzorce $\quad y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$ (v $U(x_0)$) :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + x^2,$$

pak v $U(1)$ je $\quad y'(x) = -\dfrac{2x + 2xy(x)}{-3y^2(x) + x^2}$, tedy $y'(1) = -\dfrac{2}{1} = -2$

($y(1) = 0$) (cbd.)

B) $y''(1)$:

derivujeme rovnici (**) dle x :

(***) $\quad y''(x)(x^2 - 3y^2(x)) + y'(x)(2x - 6y(x).y'(x)) = -2 - 2y(x) - 2x\,y'(x)$

pro $x = 1$: $\quad y''(1).\,1 - 2\,(2.1 - 0) = -2 - 2.0 - 2.1.(-2)$,

($y(1) = 0$, $y'(1) = -2$)

tedy $\quad y''(1) = 2 + 4 = 6$

a „užitím" vzorce pro $y'(x)$:

$$y''(x) = \left(\frac{2x + 2xy(x)}{3y^2(x) - x^2}\right)' =$$

$$= 2\,\frac{(1 + y(x) + xy'(x))(3y^2(x) - x^2) - x(1 + y(x))(6y(x).y'(x) - 2x)}{(3y^2(x) - x^2)^2},$$

tedy, $\quad y''(1) = 2\,\dfrac{(1 + 0 - 2)(-1) - 1.1(0 - 2)}{(-1)^2} = 2(1 + 2) = 6$

Poznámka:

Snad je z tohoto příkladu „vidět", že derivovat rovnici (*) nebo (**) je výrazně jednodušší, než užít vzorec pro derivaci $y'(x)$, budeme tomu dávat přednost i v dalších příkladech. Nicméně vzorec v obecné podobě se často v aplikacích užívá (tedy je i vzorec užitečný).

Dále bychom mohli pokračovat derivováním rovnice (∗∗∗) v $\mathcal{U}(1)$ (implicitní funkce $y(x)$ má dle věty všechny derivace v nějakém okolí bodu $x_0 = 1$), a odtud bychom dostali $y'''(x)$ v $\mathcal{U}(1)$ i $y'''(1)$, atd..

c) Tečna ke křivce, dané rovnicí (∗) v bodě $(1,0)$ této křivky je vlastně tečna ke grafu implicitně definované funkce $y = y(x)$ v bodě grafu $y(x)$, tj. v bodě $(1,0)$, tedy rovnice této tečny je ($y'(1) = -2$, $y(1) = 0$):

$$\underline{y = -2(x-1) \quad , \text{ tj. } \quad 2x + y - 2 = 0}$$

<u>A možná, že se „hodí" i následující obecný přístup:</u>
napišme rovnici tečny ke grafu funkce $y(x)$, implicitně definované rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí bodu (x_0,y_0) obecně:

rovnice tečny v (x_0,y_0): $\quad y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$,

a užitím vzorce pro $y'(x_0)$: $\quad y = y_0 - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(y - y_0)$,

(předpokládáme $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$)

a po úpravě dostaneme rovnici tečny ve tvaru:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0 \ ,$$

tj.

$$\underline{\nabla F(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0}$$

Tedy odtud vidíme, že za našich předpokladů, obecněji, tedy $\nabla F(x_0,y_0) \neq \vec{o}$, je $\nabla F(x_0,y_0)$ normálový vektor k tečně křivky o rovnici $F(x,y) = 0$ v bodě (x_0,y_0) této křivky, říká se, že gradient $\nabla F(x_0,y_0)$ ($\neq \vec{o}$) je normálový vektor ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$, v bodě (x_0,y_0).
A tedy zkusme (ještě jednou): $\nabla F(1,0) = (2,1)$, tedy rovnice tečny v bodě $(1,0)$ je $\quad (2,1) \cdot (x-1, y) = 0$, tj.

$$2(x-1) + y = 0 \qquad \text{(hezké a „rychlé"!)}$$

tj. $\underline{2x + y - 2 = 0}$

d) aproximace funkce $y = y(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ Taylorovým polynomem 2. stupně:

obecně (v okolí bodu $x = x_0$):

$$y(x) \cong y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

zde: $x_0 = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$, $y''(1) = 6$,

tedy $y(x) \cong 0 - 2(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2$ v $\mathcal{U}(1)$, tj.

$y(x) = -2(x-1) + 3(x-1)^2$ v $\mathcal{U}(1)$ (okolí bodu $x_0 = 1$)

a například pokus:

$$y(0{,}98) \cong (-2)\cdot(-0{,}02) + 3\cdot 0{,}0004 = 0{,}0412$$

(můžeme „spočítat", i když řešení $y(x)$ dané rovnice nemáme ve tvaru explicitním).

iii) Je dána rovnice

$$y^3 - 2y^2x - xy - 8 = 0 \quad (*) \ .$$

a) Ukažte, že rovnicí (*) je definována implicitně v okolí bodu $(0,2)$ funkce $y = y(x)$.

b) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(0,2)$.

c) Aproximujte funkci $y(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

Nyní už můžeme řešit příklad „rychleji":

a) ověříme předpoklady věty o implicitní funkci" pro:

$F(x,y) = y^3 - 2y^2x - xy - 8 = 0, \quad (x_0, y_0) = (0,2)$

(1) $F(x,y) \in C^\infty(R^2)$

(2) $F(0,2) = 8 - 8 = 0$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 3y^2 - 4xy - x \Big|_{(0,2)} = 12 \neq 0$,

tedy, v okolí bodu $(x_0, y_0) = (0,2)$ je rovnicí (*) definována implicitně funkce $y = y(x)$, $y(0) = 2$.

b) Protože $\nabla F(0,2) = (-10, 12)$, dle minulého příkladu je rovnice tečny v bodě $(0,2)$

$\nabla F(0,2) \cdot (x - 0, y - 2) = 0$, tj.

$-10x + 12(y-2) = 0$, po úpravě

$5x - 6y + 12 = 0$

a) obecné „připomenutí": Je-li $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$, pak rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) této křivky je (za našich předpokladů)

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = -2y^2 - y \Big|_{(0,2)} = -8 - 2 = -10$

c) <u>aproximace funkce $y(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ Taylorovým polynomem 2. stupně:</u>

$$T_2(x) = y(0) + y'(0).x + \frac{y''(0)}{2}.x^2$$

<u>Výpočet derivací $y'(0)$ a $y''(0)$:</u>

funkce $y(x)$ splňuje (v okolí bodu $x_0=0$) rovnici

$$y^3(x) - 2y^2(x).x - x.y(x) - 8 = 0 \qquad (**)$$

<u>$y'(0)$:</u> derivací $(**)$ (dle x) dostaneme:

$$3y^2(x).y'(x) - 4y(x).y'(x).x - 2y^2(x) - y(x) - xy'(x) = 0 \quad v\ U(0)$$

tj. $$y'(x)\left(3y^2(x) - 4xy(x) - x\right) = 2y^2(x) + y(x) \quad (***)$$

<u>v $x_0=0$</u>: $$y'(0) . 12 = 10 \Rightarrow \underline{y'(0) = \frac{5}{6}}$$

<u>$y''(0)$:</u> derivujeme rovnici $(***)$ dle x:

$$y''(x)\left(3y^2(x) - 4xy(x) - x\right) + y'(x)\left(6y(x).y'(x) - 4y(x) - 4xy'(x) - 1\right) =$$
$$= 4y(x).y'(x) + y'(x)$$

<u>v $x_0=0$</u>: $$y''(0).12 + \frac{5}{6}\left(\cancel{6}.2.\frac{5}{\cancel{6}} - 8 - 0 - 1\right) = 4.2.\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$$

tj. $$y''(0).12 + \frac{5}{6} = \frac{20}{3} + \frac{5}{6},$$

a tedy $$\underline{y''(0) = \frac{5}{9}}$$

Pak $$\underline{T_2(x) = 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2 \quad v\ U(0)}.$$

V okolí $U(0)$ je tedy aproximace řešení $y(x)$ dané rovnice:

$$\underline{y(x) \cong 2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{18}x^2}$$

(pomocí $T_2(x)$).

2. i) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=z(x,y)$. Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ.

Zobecnění pojmu funkce jedné proměnné, definované implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0), na funkce více proměnných, definované implicitně rovnicí $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$ v okolí bodu $(x_1^0,\dots x_n^0,y^0)$, je probráno v přednášce pro MA2 z 8.4.2020 (přednáška „písemná"). Zde uvedeme stručně případ implicitně definované funkce dvou proměnných (krátce implicitní funkce dvou proměnných), tedy funkce, která je řešením rovnice

$$F(x,y,z)=0 \quad \text{v okolí bodu } (x_0,y_0,z_0),$$

(když $F(x_0,y_0,z_0)=0$).

<u>Definice</u> (strana 6, přednáška 8.4.2020)

Řekneme, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=z(x,y)$, když

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$

(2) existují $\varepsilon>0$, $\delta>0$ tak, že pro každý bod $(x,y)\in \mathcal{U}((x_0,y_0),\delta)$ je $z=z(x,y)$ jediné řešení rovnice $F(x,y,z)=0$ takové, že $z(x,y)\in\mathcal{U}(z_0,\varepsilon)$.

Tedy, podobně jako v případě rovnice $F(x,y)=0$, platí:

(i) $F(x,y,z(x,y))=0$

(ii) $z(x_0,y_0)=z_0$.

A opět poznamenejme, že se v aplikacích užívá pro funkci, implicitně definovanou rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) to značení, které jsme zde už (v definici) užili, tj. $z=z(x,y)$, a obvykle se krátce říká – $z(x,y)$ je implicitní funkce dvou proměnných.

Věta (o implicitní funkci dvou proměnných)

nechť
(1) $F(x,y,z) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^3$ je otevřená množina;
(2) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, $(x_0,y_0,z_0) \in G$;
(3) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Pak rovnicí $F(x,y,z) = 0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z = z(x,y) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$.

Tedy platí: (i) $z(x_0,y_0) = z_0$

(ii) $F(x,y,z(x,y)) = 0$ v $\mathcal{U}((x_0,y_0))$

a navíc: v $\mathcal{U}(x_0,y_0)$

iii) $$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}, \quad (x,y) \in \mathcal{U}((x_0,y_0))$$

a

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}, \quad (x,y) \in \mathcal{U}((x_0,y_0))$$

Poznámky:

1. Ukážeme si opět (jako „teoretický příklad") odvození vzorce pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ – i zde se vzorce odvodí derivováním složené funkce $F(x,y,z(x,y))$ pomocí řetízkového pravidla a užitím toho, že platí $F(x,y,z(x,y)) = 0$ v $\mathcal{U}((x_0,y_0))$.

V okolí $\mathcal{U}((x_0,y_0))$ bude tedy též

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,z(x,y))\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(F(x,y,z(x,y))\right) = 0,$$

a protože jsou splněny (dle předpokladů a tvrzení věty) předpoklady věty o derivování složené funkce $F(x,y,z(x,y))$ dle x i y (F má spojité parciální derivace v G, a funkce $z(x,y)$ v $\mathcal{U}(x_0,y_0)$), můžeme tuto větu k výpočtu derivací (*) užít.

Dostaneme:

z rovnice $\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,z(x,y)) \right) = 0$ (užitím řetízkového pravidla)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0 ,$$

a odtud: $$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \quad v\ U((x_0,y_0)),$$

neboť z předpokladů (3) a (1) věty (spojitost $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$ v G) plyne, že $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \neq 0$ v „nějakém" okolí bodu (x_0,y_0), a v tvrzení věty je pak toto okolí uvažováno.

Analogicky odvodíme i „vzorec" pro $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ v okolí $U((x_0,y_0))$.

2. A opět, jako v případě implicitní funkce jedné proměnné, víme, že $z(x_0,y_0) = z_0$, a tedy odtud a z uvedených vzorců dostaneme hodnoty parciálních derivací

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} .$$

A pak lze „využít" derivací například k lineární aproximaci řešení $z = z(x,y)$ rovnice $F(x,y,z) = 0$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0):

$$z(x,y) \cong z_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0)$$

v okolí $U((x_0,y_0))$.

3. A analogicky, jako v případě implicitní funkce jedné proměnné, lze „zaměnit" proměnné v definici funkce, implicitně definované rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0), i ve větě o implicitní funkci.

Když bude $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pak zřejmě je rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $y = y(x,z)$, $y(x,z) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0,z_0))$, $y(x_0,z_0) = y_0$, a podobně, když je $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pak je rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $x = x(y,z) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(y_0,z_0))$, $x(y_0,z_0) = x_0$.

A následuje řešení zadaných příkladů.

ii) Je dána rovnice

$$z^4 - x^3 y z^2 - x z + y^3 = 0 \qquad (*) \; .$$

a) Ukažte, že touto rovnicí (*) je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitně funkce $z = z(x,y)$,
(neboli rovnicí (*) je definována implicitně funkce $z = z(x,y) \in C^1(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1) = 1$).

b) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu $z(1{,}01;\, 0{,}96)$.

c) Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z = z(x,y)$ v bodě $(1,1)$.

---

a) ověříme předpoklady věty o implicitní funkci pro

$F(x,y,z) = z^4 - x^3 y z^2 - xz + y^3$, a $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & F(x,y,z) \in C^\infty(R^3) \\ (2) & F(1,1,1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ (3) & \dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 4z^3 - 2x^3 y z - x \Big|_{(1,1,1)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(věta o implicitní funkci)}$$

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(1,1,1)$ je rovnicí (*) definována implicitně funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 1$

b) $z(1{,}01;\, 0{,}96) \cong z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 0{,}01 + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \cdot (-0{,}04)$,

je třeba určit hodnoty derivace $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

funkce $z = z(x,y)$ splňuje v okolí $U(1,1)$ rovnici

$$(**) \qquad z^4(x,y) - x^3 y z^2(x,y) - x z(x,y) + y^3 = 0$$

α) derivací rovnice (**) dle x „získáme" $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$:

v $U(1,1)$: $4z^3(x,y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 3x^2 y z^2(x,y) - x^3 y \cdot 2z(x,y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - z(x,y) - x \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0$,

tj. $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(4z^3(x,y) - 2x^3 y z(x,y) - x\right) = 3x^2 y z^2(x,y) + z(x,y)$

a v $(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 1 = 3 + 1$, tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$$

Lze též užít vzorec

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{-4}{1} = 4 .$$

b) $\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)}$ „získáme "derivaci" rovnice (**) dle y:

$$4z^3(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - x^3z^2(x,y) - 2x^3y\,z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 3y^2 = 0,$$

tj. v $U(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\left(4z^3(x,y) - 2x^3y\,z(x,y) - x\right) = x^3z^2(x,y) - 3y^2$ (***)

a v $(1,1)$: $\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\cdot 1 \qquad = -2}$

nebo „dle vzorce": $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2$

$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -x^3z^2 + 3y^2\right.$, tedy $\left.\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 2\right)$

Tedy, $\underline{z(1{,}01;\,0{,}96)} \cong 1 + 4\cdot 0{,}01 - 2\cdot(-0{,}04) = \underline{1{,}12}$

c) $\underline{\text{výpočet } \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)}$: budeme derivovat raději rovnici (***) podle x (neboť $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)$ díky spojitosti $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)$ v $U(1,1)$):

$$(****)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(x,y)\left(4z^3(x,y) - 2x^3y\,z(x,y) - x\right) +$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\left(12z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 6x^2yz - 2x^3y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 1\right) =$$
$$= 3x^2z^2(x,y) + x^3\cdot 2z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

a v bodě $(1,1)$ pak dostaneme (dosazením do (****)):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)\cdot 1 - 2(12\cdot 4 - 6 - 8 - 1) = 3 + 2\cdot 4, \text{ tedy}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1) = 77}$$

iii) a) Dokažte, že rovnicí

$$e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 = 0 \quad . \qquad (*)$$

je definována implicitně funkce $z = z(x, y)$, pro kterou je $z(1,1) = 2$.

b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $z(x, y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

d) Určete $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

---

a) ověříme opět předpoklady věty o implicitní funkci pro
$F(x,y,z) = e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2$, a $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & F(x,y,z) \in C^\infty(R^3) \\ (2) & F(1,1,2) = e^0 - 2 + 2.2 - 2 - 1 = 0 \\ (3) & \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2) = e^{z-2x} - x + 2y \Big|_{(1,1,2)} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle věty o implicitní funkci) rovnicí $(*)$ je v okolí bodu $(1,1,2)$ definována implicitně funkce $z = z(x,y)$, $z(1,1) = 2$.

b) výpočet $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

funkce $z(x,y)$ splňuje v okolí bodu $(1,1)$ rovnici

$$e^{z(x,y)-2x} - x\,z(x,y) + 2y\,z(x,y) - 2y - xy^2 = 0 \qquad (**)$$

a derivací rovnice $(**)$ dle x dostaneme:

$$e^{z(x,y)-2x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 2\right) - z(x,y) - x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + 2y\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - y^2 = 0,$$

tj. $$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x} - x + 2y\right) = z(x,y) + y^2 + 2e^{z(x,y)-2x} \qquad (***)$$

a v bodě $(1,1)$: $$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 2 = 2 + 1 + 2 \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{5}{2}}$$

Derivací rovnice (**) dle y dostaneme:

$$e^{z(x,y)-2x}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)-x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)+2z(x,y)+2y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)-2-2xy=0,$$

tj. $$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x}-x+2y\right)=-2z(x,y)+2+2xy\,,$$

a v (1,1): $$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\cdot 2=-2.2+2+2 \Rightarrow \underline{\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=0}$$

<u>Výpočet užitím vzorců pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$:</u>

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)}=-\frac{0}{2}\qquad\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=2z-2-2xy\right)$$

podobně zkuste i $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$.

c) tedy, $z(x,y)\cong z(1,1)+\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$, tj.

<u>$z(x,y)\cong 2+\frac{5}{2}(x-1)$ v okolí bodu $(x_0,y_0)=(1,1)$</u>

d) výpočet $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1)$ – lépe se určí z rovnice (~~**~~), než derivací vzorce pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x}-x+2y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(z(x,y)+y^2+2e^{z(x,y)-2x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x}-x+2y\right)+\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(e^{z(x,y)-2x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)+2\right)=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)+2y+2e^{z(x,y)-2x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\;;$$

a v (1,1): $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot 2+\frac{5}{2}\left(1.0+2\right)=0+2+2.0\,,$$

tedy $$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=-\frac{3}{2}}$$

A jeden příklad „navíc" (není v zadání domácího úkolu):

Van der Waalsova stavová rovnice (p, T, V – stavové veličiny)

je $$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT, \quad a>0,\ b>0,$$

tedy $$\left(F(p,V,T) \equiv\right) pV + \frac{a}{V} - bp - \frac{ab}{V^2} - RT = 0,$$

a nechť $F(p_0, V_0, T_0) = 0$

Máme přibližně vyjádřit změnu objemu ΔV při změně tlaku p_0 o Δp a teploty T_0 o ΔT;

předpokládáme, že $\frac{\partial F}{\partial V}(p_0, V_0, T_0) = p_0 - \frac{a}{V_0^2} + \frac{2ab}{V_0^3} \neq 0$;

pak z věty o implicitní funkci dostáváme, rovnicí $F(p,V,T)=0$ je v okolí bodu (p_0, V_0, T_0) definována implicitně funkce $V = V(p,T)$, diferencovatelná v bodě (p_0, T_0) a ($\Delta V = V(p,T) - V_0$)

$$\Delta V \cong \frac{\partial V}{\partial p}(p_0, T_0)\cdot \Delta p + \frac{\partial V}{\partial T}(p_0, T_0)\,\Delta T$$

$(\Delta p = p - p_0,\ \Delta T = T - T_0)$

Vypočtěme derivace $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial T}$:

$$\frac{\partial V}{\partial p}(p_0, T_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p}(p_0, V_0, T_0)}{\frac{\partial F}{\partial V}(p_0, V_0, T_0)} = -\frac{V_0 - b}{p_0 - \frac{a}{V_0^2} + \frac{2ab}{V_0^3}} = \frac{(b - V_0)V_0^3}{p_0 V_0^3 - aV_0 + 2ab}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T}(p_0, T_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}(p_0, V_0, T_0)}{\frac{\partial F}{\partial V}(p_0, V_0, T_0)} = -\frac{-RV_0^3}{p_0 V_0^3 - aV_0 + 2ab},$$

a pak tedy $$\Delta V \cong \frac{1}{p_0 V_0^3 - aV_0 + 2ab}\left((b - V_0)V_0^3 \Delta p + RV_0^3 \Delta T\right), \text{ tj.}$$

$$\Delta V \cong \frac{V_0^3}{p_0 V_0^3 - aV_0 + 2ab}\left((b - V_0)\Delta p + R\Delta T\right)$$

3. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a nechť platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$, v bodě (x_0, y_0, z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0, y_0, z_0) nenulová.

b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí
$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0 \ .$$

---

a) Předpokládejme (BÚNO), že $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, pak víme, že plocha, jejíž rovnice je $F(x,y,z) = 0$, je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) této plochy grafem implicitně definované funkce $z = f(x,y)$, $f \in C^{(1)}(U(x_0,y_0))$, tedy funkce $z = f(x,y)$ je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), a graf f má tedy v bodě $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ tečnou rovinu, jejíž rovnice je ($f(x_0,y_0) = z_0$)

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \ .$$

A užijeme-li vyjádření derivací $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, které je ve větě o implicitní funkci, dostaneme:

$$z = z_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0) \ .$$

A po úpravě je rovnice tečné roviny k ploše v bodě (x_0,y_0,z_0)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \ ,$$

lze psát $\underline{\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0}$

A odtud vidíme, že gradient F $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ je normálový vektor k tečné rovině plochy $F(x,y,z) = 0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy, říká se, že $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ $(\neq \vec{o})$ je normálový vektor k uvažované ploše (v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy).

A je vidět, že zase nemůžeme „zaměnit" proměnné v uvedeném odvození tečné roviny, když například bude $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, nebo $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ (tj. užijeme větu o implicitní funkci pro funkci $x = x(y,z)$, resp. $y = y(x,z)$ v okolí bodu (x_0,y_0,z_0)).

Tedy, je-li $\underline{\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{o}}$, pak rovnice tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy je

$$\underline{\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot (x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0) = 0.}$$

b) Rovnice tečné roviny ke ploše, dané rovnicí

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$$

v bodě $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,-1)$.

Ověříme předpoklady, které nám „dovolí" užít předchozí „návod":

zde $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz-6$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,-1)$,

a pak (1) $F(x,y,z) \in C^{\infty}(R^3)$

(2) $F(1,2,-1) = 1+8-1-2-6 = 0$

(3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,-1) = 3z^2 + xy \Big|_{(1,2,-1)} = 5 \neq 0$,

tedy rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,-1)$ definována implicitně funkce $z = z(x,y)$ a předchozí „návod" můžeme užít;

$$\nabla F(x,y,z) = (3x^2+yz,\ 3y^2+xz,\ 3z^2+xy), \text{ pak}$$

$$\nabla F(1,2,-1) = (1, 11, 5),$$ pak rovnice tečné roviny v bodě $(1,2,-1)$ je $(1,11,5)\cdot(x-1,\, y-2,\, z+1) = 0$, tedy

$$\underline{x + 11y + 5z - 18 = 0}$$

a normála k ploše v $(1,2,-1)$: $\underline{(x,y,z) = (1,2,-1) + t\,(1,11,5)}$, $t \in R$